

18 novembre 2025

Corrigé 9

Exercice 1. Considérez un système linéaire dont la matrice augmentée est de la forme

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -3 & \alpha \\ 0 & 1 & \alpha & \alpha - 1 \\ 0 & 0 & \alpha - 3 & \alpha - 2 \end{array} \right).$$

- (i) Pour quelles valeurs de α le système n'aura-t-il pas de solution ?
- (ii) Pour quelles valeurs de α le système admet-il une solution unique ?
- (iii) Pour quelles valeurs de α le système aura-t-il une infinité de solutions ?

Solution 1. Lorsque $\alpha = 3$, la dernière ligne devient $0 = 1$, donc le système n'a pas de solution. On considère donc le cas $\alpha \neq 3$. La matrice augmentée est

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -3 & \alpha \\ 0 & 1 & \alpha & \alpha - 1 \\ 0 & 0 & \alpha - 3 & \alpha - 2 \end{array} \right) \begin{array}{l} \xrightarrow{L_3 \rightarrow \frac{1}{\alpha-3} L_3} \\ \xrightarrow{L_1 \rightarrow 3L_3 + L_1} \\ \xrightarrow{L_2 \rightarrow -\alpha L_3 + L_2} \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \alpha + 3\frac{\alpha-2}{\alpha-3} \\ 0 & 1 & 0 & \alpha - 1 - \alpha\frac{\alpha-2}{\alpha-3} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{\alpha-2}{\alpha-3} \end{array} \right)$$

- (i) Le système n'a pas de solution lorsque $\alpha = 3$.
- (ii) Le système admet une solution unique lorsque $\alpha \neq 3$.
- (iii) Aucune valeur de α ne donne une infinité de solutions.

Exercice 2. Considérez les matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{M}_{3 \times 3}(\mathbb{R})$ et $B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{M}_{3 \times 3}(\mathbb{R})$.

Posez $U = \{X \in \mathbb{M}_{3 \times 1}(\mathbb{R}) \mid AX = BX\}$.

- (a) Montrez que U est un sous-espace du \mathbb{R} -espace vectoriel $\mathbb{M}_{3 \times 1}(\mathbb{R})$.
- (b) Trouvez une base de U et complétez cette base en une base de $\mathbb{M}_{3 \times 1}(\mathbb{R})$.

Solution 2.

- (a) De $AX = BX$ on déduit $(A - B)X = 0$. Ainsi $U = \ker(A - B)$, et le noyau d'une application linéaire est un sous-espace. Donc U est un sous-espace de $\mathbb{M}_{3 \times 1}(\mathbb{R})$.
- (b) On résout $(A - B)X = 0$ en utilisant la méthode de Gauss.

$$A - B = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \xrightarrow{L_1 \rightarrow -\frac{1}{2} L_1} \\ \xrightarrow{L_2 \leftrightarrow L_3} \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \xrightarrow{L_1 \rightarrow -\frac{1}{2} L_2 + L_1} \\ \xrightarrow{L_3 \rightarrow \frac{1}{2} L_3} \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \xrightarrow{L_1 \rightarrow L_3 + L_1} \\ \xrightarrow{L_2 \rightarrow -2L_3 + L_2} \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

La forme échelonnée réduite est l'identité, donc la seule solution de $(A - B)X = 0$ est $X = 0$. Ainsi $U = \ker(A - B) = \{0\}$. Une base de U est l'ensemble vide, et on complète en une base de $\mathbb{M}_{3 \times 1}(\mathbb{R})$ en choisissant n'importe quelle base de $\mathbb{M}_{3 \times 1}(\mathbb{R})$; par exemple la base canonique

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Exercice 3. Considérez les vecteurs $v_1 = (1, -1, 1)$, $v_2 = (1, 2, 1)$ et $v_3 = (0, 0, 1)$ dans \mathbb{R}^3 . Soit $\varphi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ l'unique application linéaire telle que $\varphi(v_1) = \varphi(v_2) = (0, 0, 0)$ et $\varphi(v_3) = v_3$. Quelle est la dimension de l'image de φ ?

Solution 3. On montre d'abord que v_1, v_2, v_3 sont linéairement indépendants. Soient $a, b, c \in \mathbb{R}$ tels que $av_1 + bv_2 + cv_3 = 0$. En remplaçant v_1, v_2 et v_3 , on obtient le système

$$(a + b, -a + 2b, a + b + c) = (0, 0, 0)$$

De la première équation, $a = -b$. En substituant dans la deuxième : $-(-b) + 2b = 3b = 0 \implies b = 0 \implies a = 0$. La troisième donne alors $c = 0$. Ainsi $a = b = c = 0$, donc les vecteurs v_1, v_2, v_3 sont linéairement indépendants et forment une base de \mathbb{R}^3 .

Appliquons maintenant le théorème du rang. On a $\varphi(v_1) = \varphi(v_2) = 0$. Ainsi $\text{Vect}\{v_1, v_2\} \subseteq \ker(\varphi)$. Comme v_1, v_2 sont indépendants, $\dim(\ker \varphi) \geq 2$. De plus, $\varphi(v_3) = v_3 \neq 0$, donc le noyau n'est pas tout \mathbb{R}^3 ; on a donc $\dim(\ker \varphi) = 2$. D'après le théorème du rang :

$$\text{rg}(\varphi) + \dim(\ker \varphi) = 3.$$

Donc $\text{rg}(\varphi) = 3 - 2 = 1$. Par conséquent, $\dim(\text{im } \varphi) = 1$.

Exercice 4. Soit $\varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ une application \mathbb{R} -linéaire telle que $\varphi((1, 0)) = (1, -1, 1)$ et $\varphi((-1, 2)) = (1, 2, 1)$. Trouvez une base de $\ker(\varphi)$ et une base de $\text{im}(\varphi)$.

Solution 4. Les vecteurs $(1, 0)$ et $(-1, 2)$ sont linéairement indépendants dans \mathbb{R}^2 ; ils forment donc une base de l'espace de départ \mathbb{R}^2 . Leurs images sont

$$\varphi((1, 0)) = (1, -1, 1), \varphi((-1, 2)) = (1, 2, 1).$$

Ces deux vecteurs ne sont pas des multiples scalaires l'un de l'autre, donc ils sont linéairement indépendants dans \mathbb{R}^3 . Ainsi, le rang de φ est 2. D'après le théorème du rang :

$$\dim(\ker \varphi) = 2 - \text{rg}(\varphi) = 2 - 2 = 0.$$

Le noyau est donc réduit au vecteur nul :

$$\ker \varphi = \{0\}.$$

Une base de l'image est donnée par les deux images indépendantes :

$$\text{im } \varphi = \text{Vect}\{(1, -1, 1), (1, 2, 1)\}.$$

Exercice 5. Soit K un corps et considérez $A = (a_{ij}) \in \mathbb{M}_{3 \times 5}(K)$. Parmi les affirmations suivantes, lesquelles sont vraies ? Si elles sont vraies, fournissez une brève démonstration ; si elles sont fausses, fournissez un contre-exemple.

(a) Le rang de A est égal à trois.

(b) Le noyau de l'application K -linéaire $\varphi_A : \mathbb{M}_{5 \times 1}(K) \rightarrow \mathbb{M}_{3 \times 1}(K)$ définie par

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{15} \\ a_{21} & \dots & a_{25} \\ a_{31} & \dots & a_{35} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix}$$

a dimension supérieure ou égale à deux.

- (c) Il existe deux vecteurs linéairement indépendants u et v dans $\mathbb{M}_{5 \times 1}$ tels que $\varphi(u) = \varphi(v) = 0$.
 (d) Le système $AX = 0$ n'admet que la solution triviale.
 (e) Les colonnes de A forment une partie liée de $\mathbb{M}_{3 \times 1}(K)$.

Solution 5.

- (a) Faux. On a $\text{rg}(A) \leq \min(3, 5) = 3$, mais il n'est pas forcément égal à 3. Contre-exemple : $A = 0$ a rang 0.
 (b) Vrai. D'après le théorème du rang appliqué à φ_A ,

$$\dim(\ker \varphi_A) = 5 - \text{rg}(A) \geq 5 - 3 = 2.$$

- (c) Vrai. D'après (b), $\dim(\ker \varphi_A) \geq 2$, donc il existe au moins deux vecteurs $u, v \in \ker \varphi_A \subseteq \mathbb{M}_{5 \times 1}$ linéairement indépendants tels que $\varphi_A(u) = \varphi_A(v) = 0$.
 (d) Faux. D'après (b), $\dim(\ker \varphi_A) \geq 2$, donc il est non trivial.
 (e) Vrai. Les colonnes sont dans $\mathbb{M}_{3 \times 1}(K)$. Tout ensemble de 5 vecteurs dans un espace de dimension 3 est linéairement dépendant.
-

Exercice 6. Soit $A = (a_{ij}) \in \mathbb{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R})$ la matrice avec coefficients $a_{ij} = 2i + j - 2$.

- (a) Montrez que l'application $\varphi : \mathbb{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R})$ définie par $B \mapsto A \cdot B$ est \mathbb{R} -linéaire et déterminez la matrice de φ par rapport à la base $\{E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22}\}^1$.
 (b) Trouvez une base de $\ker(\varphi)$ et une base de $\text{im}(\varphi)$.

Solution 6. On commence par calculer la matrice A :

$$a_{ij} = 2i + j - 2 \implies A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

- (a) On vérifie d'abord la linéarité. Pour tout $B, C \in \mathbb{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R})$ et tout $c \in \mathbb{R}$,

$$\varphi(B + C) = A(B + C) = AB + AC = \varphi(B) + \varphi(C)$$

et

$$\varphi(cB) = A(cB) = c(AB) = c\varphi(B).$$

Donc φ est linéaire.

Calculons maintenant la matrice de φ dans la base $\mathcal{B} = \{E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22}\}$. On obtient :

$$AE_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} = E_{11} + 3E_{21},$$

$$AE_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = E_{12} + 3E_{22},$$

$$AE_{21} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} = 2E_{11} + 4E_{21},$$

$$AE_{22} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} = 2E_{12} + 4E_{22}.$$

1. Autrement dit, nous considérons cette base à la fois dans l'espace de départ et dans l'espace d'arrivée.

Ainsi, la matrice de φ dans la base est

$$[\varphi]_{\mathcal{B},\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

(b) Écrivons $B = [b_1, b_2]$ avec $b_1, b_2 \in \mathbb{M}_{2 \times 1}(\mathbb{R})$. Si $AB = 0$, alors $Ab_1 = 0$ et $Ab_2 = 0$. Résolvons $Ax = 0$ pour $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 0, \\ 3x_1 + 4x_2 = 0 \end{cases} \implies 0 = (3x_1 + 4x_2) - 3(x_1 + 2x_2) = -2x_2 \implies x_2 = 0 \implies x_1 = 0.$$

Donc $b_1 = b_2 = 0$ et $B = 0$. Ainsi $\ker(\varphi) = \{0\}$.

Comme $\dim \mathbb{M}_{2 \times 2} = 4$ et $\dim \ker \varphi = 0$, d'après le théorème du rang, $\text{rg}(\varphi) = 4$. Par conséquent, $\text{im}(\varphi) = \mathbb{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R})$ et l'image engendre tout l'espace. On peut donc choisir n'importe quelle base de $\mathbb{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R})$ comme base de $\text{im}(\varphi)$, par exemple la base canonique $\{E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22}\}$, ou $\{AE_{11}, AE_{12}, AE_{21}, AE_{22}\}$.